

Table of z-Transform Pairs

$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1}dz$		$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$	ROC
transform	$x[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X(z)$	R_x
time reversal	$x[-n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X(\frac{1}{z})$	$\frac{1}{R_x}$
complex conjugation	$x^*[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X^*(z^*)$	R_x
reversed conjugation	$x^*[-n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X^*(\frac{1}{z^*})$	$\frac{1}{R_x}$
real part	$\Re\{x[n]\}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	R_x
imaginary part	$\Im\{x[n]\}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	R_x
time shifting	$x[n - n_0]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x
scaling in \mathcal{Z}	$a^n x[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X(\frac{z}{a})$	$ a R_x$
downsampling by N/decimation	$x[Nn], N \in \mathbb{N}_0$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(z^{\frac{1}{N}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k})$	R_x
linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$R_x \cap R_y$
time multiplication	$x_1[n]x_2[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{2\pi j} \oint X_1(u)X_2(\frac{z}{u})u^{-1}du$	$R_x \cap R_y$
time convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X_1(z)X_2(z)$	$R_x \cap R_y$
delta function	$\delta[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	1	$\forall z$
shifted delta function	$\delta[n - n_0]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	z^{-n_0}	$\forall z$
step	$u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
	$-u[-n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
ramp	$nu[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
	$n^2u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z > 1$
	$-n^2u[-n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z < 1$
	$n^3u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$ z > 1$
	$-n^3u[-n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$ z < 1$
	$(-1)^n$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z+1}$	$ z < 1$
exponential	$a^n u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
	$-a^n u[-n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
	$a^{n-1} u[n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{z-a}$	$ z > a $
	$na^n u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
	$n^2a^n u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$ z > a $
	$e^{-an} u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-e^{-a}}$	$ z > e^{-a} $
	$a^{ n } \quad a < 1$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(1-a^2)}{(z-a)(1-az)}$	$ a < z < \frac{1}{ a }$
exp. interval	$\begin{cases} a^n & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$
sine	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z \sin(\omega_0)}{z^2 - 2 \cos(\omega_0)z + 1}$	$ z > 1$
cosine	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z - \cos(\omega_0))}{z^2 - 2 \cos(\omega_0)z + 1}$	$ z > 1$
	$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{za \sin(\omega_0)}{z^2 - 2a \cos(\omega_0)z + a^2}$	$ z > a$
	$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z(z - a \cos(\omega_0))}{z^2 - 2a \cos(\omega_0)z + a^2}$	$ z > a$
differentiation in \mathcal{Z}	$nx[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x
integration in \mathcal{Z}	$\frac{x[n]}{n}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$-\int_0^z \frac{X(z)}{z} dz$	R_x
first difference	$x[n] - x[n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$(1 - \frac{1}{z})X(z)$	$R_x, z \neq 0$
accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{z-1}X(z)$	R_x
	$\frac{\prod_{i=1}^m (n-i+1)}{a^m m!} a^m u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	

Note: $\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$