Fondamenti di Telecomunicazioni
Allievi Ingegneria Fisica
Prima Prova Recupero 20/02/2003

1. Calcolare l'antitrasformata di Fourier di *S(f)* definito come

$$S(f)=\begin{cases}1+\cos(\pi \mathrm{fT}); & |\mathrm{f}|<1/T\\ 0 \text{ altrove}\end{cases}$$

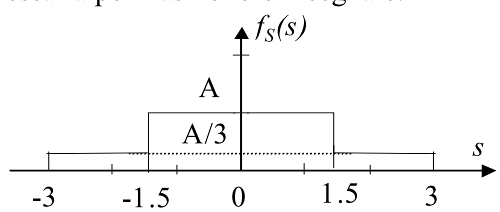
   e tracciarne l'andamento qualitativo.

2. Utilizzando le proprietà della Trasformata di Fourier mostrare che l'area della convoluzione di due funzioni reali è uguale al prodotto delle aree delle singole funzioni.

3. Per il segnale $x(t)=\cos^2(4\pi t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi t)$ si determini il valore minimo della frequenza di campionamento affinché esso possa essere ricostruito esattamente dai suoi campioni.

4. Un rumore *n(t)* stazionario, densità di probabilità delle ampiezze di tipo gaussiano e densità spettrale di potenza $G_n(f)=|kf|$, passa attraverso un filtro con $H(f)=0.5$ negli intervalli $(-f_2,-f_1)$ (f_1,f_2) e *0* altrove. Quale sarà la potenza di rumore all'uscita del filtro?

5. Un segnale caratterizzato dalla densità di probabilità delle ampiezze mostrata in figura viene campionato a *16 kHz* e quantizzato uniformemente, utilizzando *10 bit* per campione. Si calcoli il rapporto fra potenze di segnale e di rumore di quantizzazione. Si presti attenzione al fatto che la densità di prob. del segnale di ingresso non è uniforme.
   La sequenza binaria ottenuta viene poi codificata con un codice lineare a blocco *(7,4)*. Si utilizza infine una modulazione *16QAM* per la trasmissione. Si determini la banda minima necessaria per trasmettere il segnale.



6. Un flusso numerico a *1 Mbit/s* deve essere trasmesso ad una distanza *L=5 Km*, utilizzando un mezzo trasmissivo con attenuazione in potenza costante nella banda di trasmissione e pari a *20 dB/Km*. Il rumore all'ingresso del ricevitore è additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $G_N(f)=N_0/2=10^{-17}\,W/Hz$. Al termine del collegamento si vuole garantire una probabilità di errore sul bit

$P(e) \leq 10^{-8}$. La banda occupata in trasmissione non deve essere maggiore di *B_T=300 KHz*, centrata intorno alla frequenza *f_C = 1.5 GHz*, mentre al campionatore si devono avere impulsi di Nyquist con fattore di roll-off $\alpha = 0.5$. Si scelga un sistema di modulazione adatto alla trasmissione del segnale considerato e si valuti la potenza che deve essere trasmessa. Successivamente si valuti a che lunghezza può arrivare il collegamento, a parità di prestazioni, se la potenza trasmessa viene decuplicata.

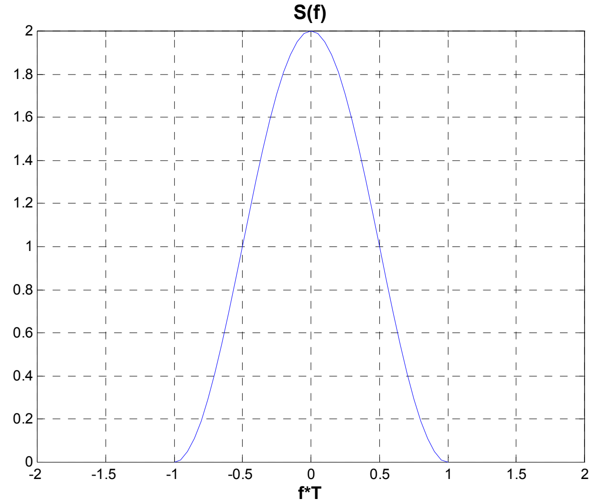
7. Si scriva il codice Matlab più conciso possibile per generare nell'intervallo da *–2* a *2* sec. (passo dt=10ms) il seguente segnale

$$x(t) = \begin{cases} \sin^3(4\pi t) \cdot e^{-2t} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

si scriva inoltre il codice per calcolare e visualizzare il modulo della sua Trasformata di Fourier.

Soluzioni

1.

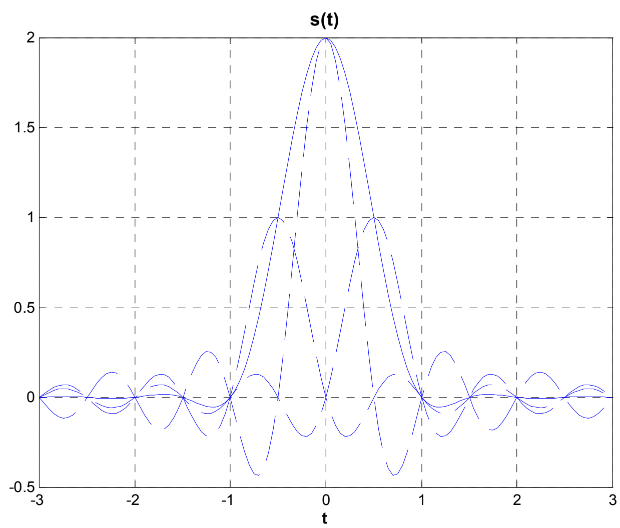


$$S(f)=\left[1+\cos(\pi fT)\right]\cdot rect\left(\frac{f}{2/T}\right)$$

$$s(t)=\left[\delta(t)+\frac{1}{2}\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(t+\frac{T}{2}\right)\right]*\frac{2}{T}\frac{\sin\pi t\frac{2}{T}}{\pi t/\frac{2}{T}}=$$

$$=\frac{2}{T}\left[\frac{\sin\pi t\frac{2}{T}}{\pi t\frac{2}{T}}+\frac{1}{2}\frac{\sin\pi\left(t-\frac{T}{2}\right)\frac{2}{T}}{\pi\left(t-\frac{T}{2}\right)\frac{2}{T}}+\frac{1}{2}\frac{\sin\pi\left(t+\frac{T}{2}\right)\frac{2}{T}}{\pi\left(t+\frac{T}{2}\right)\frac{2}{T}}\right]$$

Posto T=1 si ha il seguente andamento di *s(t)*



2. Date le funzioni $x(t), y(t)$, chiamate A_x, A_y, A_{x*y} le aree di $x(t), y(t)$ e della loro convoluzione ed indicato inoltre con $F[x(t)]$ la trasformata di Fourier di $x(t)$ si ha:

$$A_{x*y} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * y(t)dt = F[x(t) * y(t)]\Big|_{f=0} = [X(f) \cdot Y(f)]\Big|_{f=0} = X(0) \cdot Y(0) = A_x \cdot A_y$$

3. Si ha

$$G_u(f) = G_n(f) \cdot |H(f)|^2$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} G_u(f)df = 2\int_{f_1}^{f_2} |kf| \cdot 0.5^2 df = \frac{1}{2} \cdot |k| \cdot \int_{f_1}^{f_2} f \cdot df = \left(f_2^2 - f_1^2\right) \cdot |k| \cdot \frac{1}{4}$$

4. Il segnale *x(t)* può essere scritto come:

$$x(t) = \cos^2(4\pi t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 4t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi t)$$

Le componenti del segnale hanno quindi frequenza 0, 4, 2 Hz. Deve quindi risultare $f_c > 8Hz$.

5. Dall'analisi dell'andamento della densità spettrale di potenza si ricava facilmente A=0.25. Il numero di livelli di quantizzazione è elevato per cui la potenza del rumore di quantizzazione risulta pari a $N = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{(3+3)/2^{10}}{12}$ (Δ rappresenta l'ampiezza dell'intervallo di quantizzazione). La potenza media di segnale è data invece da:

$$S_S = \int_{-3}^{3} s^2 \cdot f_s(s)ds = 2 \cdot 0.25 \cdot \left[\int_0^{3/2} s^2 ds + \int_{3/2}^{2} \frac{s^2}{3} ds\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{9}{8} + \frac{21}{8}\right] = \frac{15}{8}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{15/8}{\Delta^2/12} = \frac{15/8}{\left(\frac{3+3}{2^{10}}\right)^2/12} = 655360 \approx 58.2dB;$$

Nel caso invece di densità di prob. delle ampiezze del segnale di ingresso uniforme si avrebbe $S/N\big|_{dB} \approx 6N = 60dB$

La frequenza di bit è data data da $f_b = 16.000 \cdot 10 \cdot \frac{7}{4} = 280.000$ bit/sec. La banda minima che deve essere garantita al sistema è:

$$B_{\min} = 2 \cdot \frac{1}{2} f_s \cdot (1+\delta)\Big|_{\delta=0} = f_s = \frac{f_b}{4} = 70KHz$$

6. Con un fattore di "roll-off" $\alpha = 0.5$, la massima frequenza di simbolo compatibile con la banda a disposizione risulta essere:

$$f_S = \frac{B_T}{1+\delta} = \frac{300 \cdot 10^3}{1.5} = 200 \cdot 10^3 \text{ simboli/s}$$

Considerata la frequenza di bit (*1 Mbit/sec.*) la massima frequenza di simbolo utilizzabile sarà data da:

$$f_S = \frac{10^6}{6} = 166.66 \cdot 10^3 \text{ simboli/sec.} \Rightarrow 64\text{QAM}$$

Con una modulazione 64 QAM la probabilità d'errore sul bit sarà data da:

$$P(e) \approx Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 L}{L^2-1}\frac{2E_b}{N_0}}\right)\Bigg|_{L=8} \leq 10^{-8}$$

Da ciò si ricava:

$$\left(\sqrt{\frac{3\log_2 L}{L^2-1}\frac{2E_b}{N_0}}\right)\Bigg|_{L=8} = \sqrt{0.29\frac{E_b}{N_0}} = 5.7$$

$$\Downarrow$$

$$E_b = 0.29 \cdot N_0 \cdot 32.5 = 9.42 \cdot N_0 = 9.42 \cdot 2 \cdot 10^{-17} = 18.84 \cdot 10^{-17} J$$

$$P_R = E_b \cdot f_b = 18.84 \cdot 10^{-17} \cdot 10^6 = 18.84 \cdot 10^{-11} W$$

L'attenuazione del collegamento è pari a $20 \cdot 5 = 100 dB$ si ricava quindi:

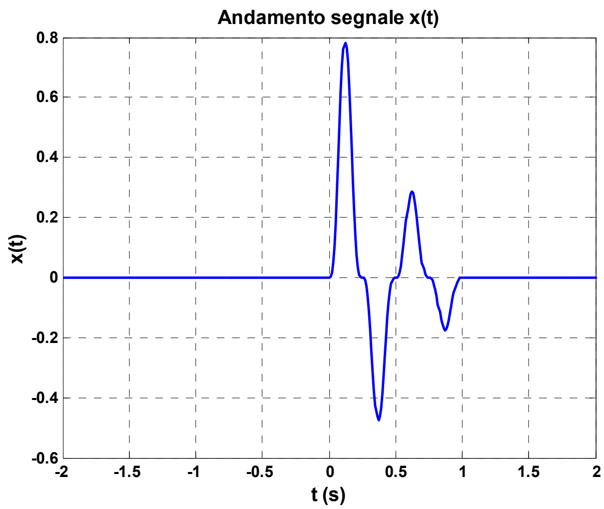
$$P_T = P_R \cdot 10^{10} = 18.84 \cdot 10^{-1} \approx 2W$$

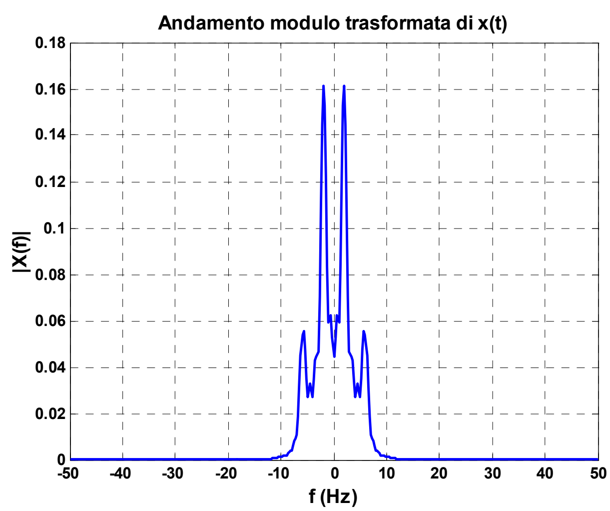
Assumendo una potenza in trasmissione *10* volte più grande (*10 dB* in più), si ottengono le stesse prestazioni con una attenuazione del mezzo trasmissivo pari a *110 dB*, che corrispondono ad una lunghezza di *5.5 Km*.

7. Un possibile codice Matlab è:

```
dt=0.01;
t=-2:dt:2;
N=length(t);
x=exp(-2*t).*sin(4*pi*t).^3;
set=find(t<0 | t>1);
x(set)=0;
figure
plot(t,x)

X=fftshift(abs(fft(x)))*dt;
v=1/N/dt;
f=(-(N-1)/2:(N-1)/2)*v;
figure
plot(f,X)
```


Andamento segnale x(t)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
x(t)
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
t (s)


Andamento modulo trasformata di x(t)
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
|X(f)|
-50
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40
50
f (Hz)