Fondamenti di Telecomunicazioni
Allievi Ingegneria Fisica
Prova del 03/02/2002

1. Dato il segnale periodico $x(t)$, definito come ripetizione con periodo $T_0 = 4[s]$ di:

$$\begin{cases} A\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) & 0 \le t < 3 \\ 0 & 3 \le t < 4 \end{cases}$$

   Rappresentare graficamente il segnale su due periodi (per esempio $0<t<8$) e calcolarne potenza, valor medio, energia.

2. Il segnale $x(t) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi t\right) + \sin\left(\frac{8}{3}\pi t\right)$ è applicato all'ingresso di un sistema lineare tempo invariante caratterizzato dalla risposta all'impulso $h(t) = \delta(t) + \delta(t - 0.75)$. Quale sarà l'espressione del segnale in uscita ($y(t)$)?

3. Tracciare l'andamento nel tempo del segnale sotto indicato e calcolarne la sua Trasformata di Fourier.

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{2T} + 0.5\right) - rect\left(\frac{t}{2T} - 0.5\right)$$

4. Si voglia digitalizzare un segnale analogico con banda compresa fra *0* e *50000 Hz*. Assumendo che la distribuzione delle ampiezze del segnale sia uniforme, e che si voglia garantire un SNR (legato al rumore di quantizzazione) di *96 dB*, quale sarà il bit-rate generato dall'operazione di digitalizzazione operando alla minima frequenza di campionamento? Si pensi ora di considerare un flusso numerico 10 volte superiore a quello precedentemente indicato (ottenuto ad esempio multiplando a divisione di tempo 10 segnali digitalizzati). Se per trasmettere questo flusso viene utilizzata una modulazione 64QAM quale sarà la minima banda necessaria alla trasmissione?

5. Sia dato il segnale

$$g(t)=\begin{cases} B\cdot\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) & 0\le t\le T \\ 0 & altrove \end{cases}$$

con $T=0.1\ ms$. A partire da questo segnale elementare viene generato il segnale $s(t)=\sum_k a_k g(t-kT)$, le ampiezze a_k sono legate ad informazioni binarie che si vogliono trasmettere nel modo seguente : *bit "0"* $\rightarrow a_k=-1$, *bit "1"* $\rightarrow a_k=+1$. Il segnale *s(t)* giunge poi al ricevitore con la stesa ampiezza, ma corrotto da un rumore additivo bianco con densità spettrale di potenza $S_N(f)=\dfrac{N_0}{2}=4\cdot10^{-8}\ [\mathrm{W/Hz}]$.

Rispondere ai seguenti quesiti.

a) Si assuma di leggere il segnale all'uscita del filtro di ricezione negli istanti *(k+1)T* (per l'impulso compreso nell'intervallo $0<t<T$ l'istante di lettura sia *T*). In questo caso quale è la risposta all'impulso del filtro di ricezione adattato a *g(t)*? Se ne disegni l'andamento.

b) Quanto deve valere l'ampiezza *A* di *g(t)* per avere una probabilità d'errore $P_e=10^{-12}$?

c) Quale è il bit-rate del sistema descritto?

d) Avendo necessità di trasmettere 40 kbit/s utilizzando sempre la stessa forma d'onda base cosa si potrebbe fare? Di quanti dB occorre aumentare la potenza ricevuta per mantenere una probabilità d'errore $P_e=10^{-12}$?

6. Siano dati i due segnali:

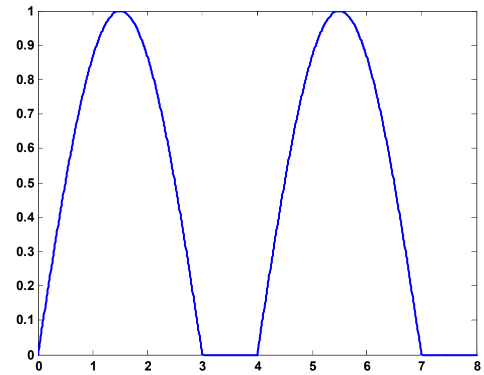
$$x_1(t)=\begin{cases} 2\sin(2\pi t) & 0\le t\le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases} -2\sin(2\pi t) & 0\le t\le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Disegnarne l'andamento nell'intervallo $0\le t\le 2$ [s]. Sempre per lo stesso intervallo di tempo, si scriva il codice MATLAB più conciso possibile che serva a generare i segnali suddetti (si assuma *dt=10ms*)

Soluzioni

1. In figura è illustrato l'andamento del segnale considerato nell'intervallo 0<t<8 supponendo A=1.



$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \frac{A^2}{4}\int_0^3 \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)dt = \frac{A^2}{8}\int_0^3 dt - \frac{A^2}{8}\int_0^3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)dt = \frac{A^2}{8}[t]_0^3 = \frac{3}{8}A^2$$

$$m = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{A}{4}\int_0^3 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)dt = \frac{A}{4}\left[-\frac{3}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]_0^3 = \frac{3A}{2\pi}$$

Poiché il segnale è a potenza finita la sua energia sarà infinita.

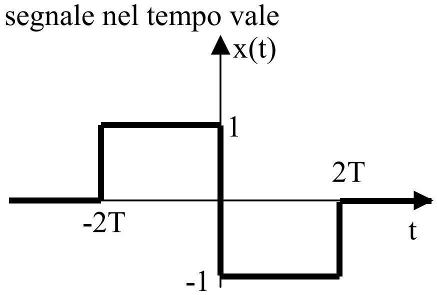
2. La funzione di trasferimento del sistema LTI vale:

$$H(f) = F[h(t)] = 1 + e^{-j2\pi f\cdot 0.75} = e^{-j\pi f\cdot 0.75}\left[e^{j\pi f\cdot 0.75} + e^{-j\pi f\cdot 0.75}\right] =$$

$$= 2\cos(\pi f\cdot 0.75)e^{-j\pi f\cdot 0.75} = 2\cos\left(2\pi\frac{3}{8}f\right)e^{-j\pi f\cdot 0.75}$$

La frequenza della componente cosenusoidale e sinusoidale dell'ingresso valgono rispettivamente $f_1 = \frac{2}{3},\ f_2 = \frac{4}{3}$. Si ha $H(f_1) = 0,\ \mathrm{H}(f)_2 = 2$, perciò $y(t) = 2\sin\left(\frac{8}{3}\pi t\right)$.

3. L'andamento del segnale nel tempo vale



$$X(f) = F[x(t)] = 2T\frac{\sin(\pi f 2T)}{(\pi f 2T)}\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right) = j4T\frac{\sin(\pi f 2T)}{(\pi f 2T)}\sin(2\pi fT) = j4T\frac{\sin(\pi f 2T)^2}{(\pi f 2T)}$$

4. La minima frequenza di campionamento e *100 KHz*. Ad un SNR di *96 dB* corrispondono *16 bit/campione*. Il bit rate è quindi pari a *1.6 Mbit/s*. Se consideriamo un bit-rate di *16 Mbit/s* ed una modulazione *16QAM*, la banda minima per la trasmissione è $B_{\min} = f_s = \frac{f_s}{6} = \frac{16 \cdot 10^6}{6} \approx 2.7MHz$.

5. Le risposte ai vari quesiti sono:
   a) $h(t) = g(T-t) = A \cdot \sin\left[\frac{2\pi(T-t)}{T}\right] = -A \cdot \sin\left[\frac{2\pi(t-T)}{T}\right] = -A \cdot \sin\left[\frac{2\pi t}{T}\right]$
   b) $P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-12} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \approx 7.05 \Rightarrow E_b = 7.05^2 \frac{N_0}{2} = 2 \cdot 10^{-6}$ (J)
   ricordando che l'energia in un periodo (T) di un segnale sinusoidale di ampiezza unitaria è pari a T/2 si ha: $A = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} = 0.2V$
   c) Il bit-rate del sistema è *10 kbit/s*.
   d) Per incrementare di 4 volte il bit-rate occorre utilizzare un 16 PAM. Per mantenere la stessa probabilità d'errore si ha:

$$P_{2PAM}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b,2PAM}}{N_0}}\right) = P_{16PAM}(e) = \frac{2(M-1)}{M \cdot \lg_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \lg_2 M}{M^2-1} \frac{2E_{b,16PAM}}{N_0}}\right)\Bigg|_{M=16}$$

$$= \frac{30}{64} Q\left(\sqrt{\frac{12}{255} \frac{2E_{b,16PAM}}{N_0}}\right)$$

Per ottenere l'uguaglianza è sostanzialmente necessario che siano uguali gli argomenti delle due funzioni *Q()*. Perciò:

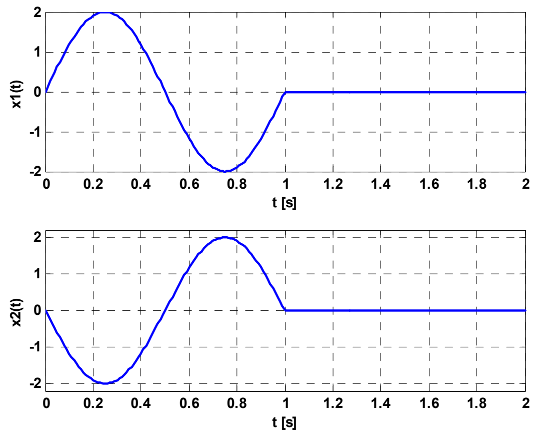
$$\frac{12}{255} \frac{2E_{b,16PAM}}{N_0} = \frac{2E_{b,2PAM}}{N_0} \Rightarrow E_{b,16PAM} = \frac{255}{12} E_{b,2PAM}$$

$$P_{16PAM} = E_{b,16PAM} \cdot R_{16PAM} = \frac{255}{12} E_{b,2PAM} \cdot 4R_{2PAM} = \frac{255}{3} E_{b,2PAM} \cdot R_{2PAM} =$$

$$= \frac{255}{3} P_{2PAM} = 85 P_{2PAM}$$

Per mantenere le stesse prestazioni (probabilità d'errore) nel caso del 16PAM è necessario aumentare la potenza ricevuta di *85* volte, un fattore pari a *19.3 dB*.

6. L’andamento dei due segnali considerati è:



Un codice MATLAB per la generazione dei segnali è:

```
dt=0.01;
t=0:dt:2;
x1=zeros(size(t));
set=find(t<=1);
x1(set)=2*sin(2*pi*t(set));
x2=-x1;
```