Milano, 30/10/2001

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (Laurea on Line)

Corso di Fondamenti di Telecomunicazioni

Prima prova Intermedia

Carissimi studenti,
scopo di questa prima prova intermedia è quello di verificare il vostro grado di apprendimento sulle prime 14 lezioni del corso.

Il testo della prova vi viene reso disponibile nella serata di Venerdì 2 Novembre 2001. Il file Word contenente le risposte ai quesiti deve essere consegnato, per essere valido, sulla piattaforma LOL (consegna esercizi), entro le ore 21 di Lunedì 5 Novembre. Il file con le risposte deve avere come nome *TLC_1_cognome_nome.doc*. Dove *cognome* e *nome* vanno sostituiti con gli effettivi cognome e nome di ciascun studente.
Non vi è possibilità, da parte del docente e dei tutor, di controllare se si realizzino "soluzioni collettive" o avvengano "copiature". Il poter dare un valore a questa prova intermedia è lasciato quindi alla Vostra correttezza.

La prova è articolata in 7 domande che coprono gli argomenti trattati. Ad ognuna di esse dovrete dare una risposta motivandola quanto meglio possibile (nel caso dobbiate scrivere formule usate l'equation editor). E' essenziale che siate precisi e concisi. E' anche possibile non rispondere ad una o più domande. All'inizio di ciascuna riposta andrà indicato il numero del quesito a cui essa si riferisce.
A ciascuna risposta verrà dato un punteggio che varia fra *-2* (risposta errata) a *+5* (risposta completamente corretta). Ad un quesito senza risposta verrà attribuito un punteggio pari a *0*.
Il punteggio assegnato a ciascun quesito potrà essere influenzato anche dal tempo di consegna sul sito Luarea on Line.

La prova verrà ritenuta sufficiente quando il punteggio totale accumulato risulterà superiore o uguale a *18*.

Buon lavoro a tutti,

Carlo Riva, Cesare Svelto, Stefano Tubaro

1. *Parte A della domanda*

   Sia dato il segnale complesso:

$$x(t) = 10\cos\left(2\pi\frac{t}{4}\right) + j5\sin\left(2\pi\frac{t}{8}\right)$$

   Quale è il modulo di tale segnale per t=2?

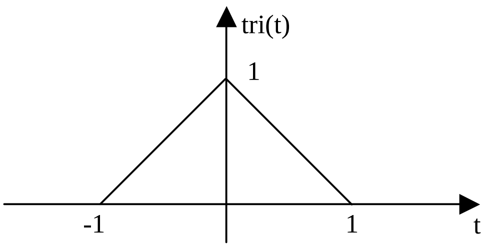
   Parte B della domanda

   Sia dato il segnale

$$x(t) = 10\,\mathrm{tri}\left(\frac{5-t}{4}\right)$$

   In quale intervallo temporale il segnale assume valori diversi da zero?

   Si ricordi che: $s(a-t) = s[-(t-a)]$ e che l'andamento del segnale tri(t) è il seguente:

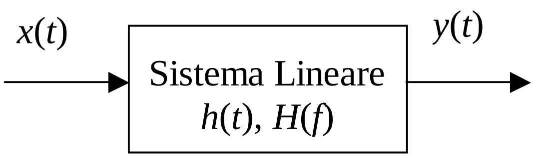


2. Disegnare, anche solo qualitativamente, l'andamento del segnale:

$$x(t) = \begin{cases} \cos[2\pi(t/T)] & |t| < \frac{3}{2}T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   Si calcoli poi la Trasformata di Fourier del segnale. Piuttosto che affrontare il calcolo analitico della trasformata si cerchi di vedere x(t) come prodotto di due semplici segnali la cui Trasformata di Fourier è già nota.

3. Sia dato lo schema in figura:



   La risposta in frequenza del sistema vale:

$$H(f) = \begin{cases} 10 & |f| < 1000Hz \\ 0 & altrove \end{cases}$$

   Se l'ingresso vale:

$$x(t) = 50\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{800}\right)$$

   Quale sarà l'andamento di y(t)?

4. Sia dato un sistema in cui il legame fra ingresso, $x(t)$, ed uscita, $y(t)$, è definito dalla relazione:

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau$$

Di fatto, il segnale in uscita all'istante t ha come valore la media dei valori assunti dal segnale di ingresso nell'intervallo $(t\text{-}T,\ t)$.
Si può dimostrare che il sistema in questione è un sistema lineare tempo-invariante.

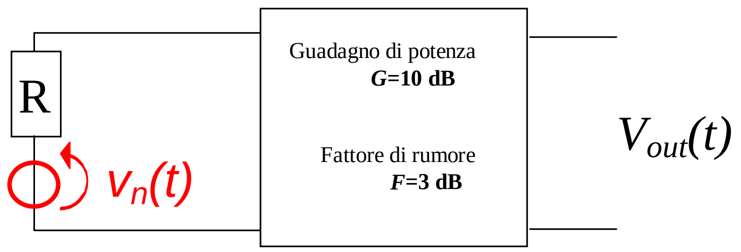
- Determinare la risposta all'impulso, $h(t)$, del sistema (verificare che esso è un segnale rettangolare opportunamente scalato e ritardato/anticipato).
- Utilizzando la $h(t)$, determinata al punto precedente, verificare che l'integrale (prodotto) di convoluzione fra $x(t)$ ed $h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

  corrisponde all'uscita del sistema come definita nella prima formula dell'esercizio.
- Sulla base della risposta $h(t)$ il sistema può essere classificato come causale?

5. A istanti di tempo casuali viene misurata la temperatura di una stanza nella quale le finestre vengono aperte e chiuse casualmente ed anche l'impianto di riscaldamento viene acceso e spento in modo completamente impredicibile. Ogni misura (in gradi Celsius) può essere vista come l'estrazione di una variabile casuale che assumiamo caratterizzata da media pari a 20 e scarto quadratico medio (radice quadrata della varianza) pari a 10. Quale sarà la probabilità che la singola lettura dia come risultato un numero maggiore di 40?

6. Si consideri il sistema riportato in figura (in cui i vari blocchi risultino fra loro adattati):



Al termine di rumore in ingresso, $V_n(t)$, è associata una temperatura equivalente di rumore pari a 1000 ^oK. Quale sarà la temperatura equivalente di rumore all'uscita del sistema? Se misurassimo la potenza di rumore disponibile in uscita all'interno di una banda compresa nell'intervallo fra *–100 MHz* e *100 MHz* quanto varrebbe questa potenza?
Si ricordi che $1\ MHz=10^6\ Hz$.

7. Si consideri un segnale (a valor medio *0* e con densità di probabilità delle ampiezze uniforme) caratterizzato da componenti in frequenza comprese nell'intervallo fra *–100 kHz* e *100 kHz*. Si voglia rappresentarlo in forma numerica attraverso campionamento, quantizzazione (uniforme), e codifica (rappresentazione di ciascun campione su *N bit*).

Per essere certi di potere ricostruire il segnale in maniera corretta, quale deve essere la minima frequenza di campionamento?
Volendo garantire un rapporto fra potenza di segnale e potenza del rumore di quantizzazione migliore di *96 dB*, quale sarà il numero minimo di *bit al secondo* necessari a rappresentare il segnale?

Soluzioni

1. *Parte A della domanda*

   Per $t = 2$ si ha:

$$x(2) = 10\cos\left(2\pi\frac{2}{4}\right) + j5\sin\left(2\pi\frac{2}{8}\right) = 10\cos(\pi) + j5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10(-1) + j5(1) = -10 + j5$$

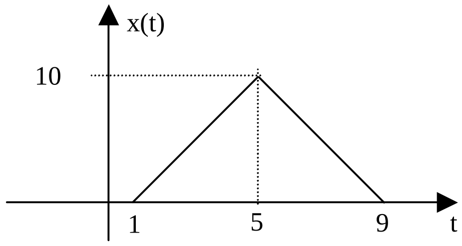
$$|x(2)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[x(2)] + \mathrm{Im}^2[x(2)]} = \sqrt{(-10)^2 + 5^2} = \sqrt{125}$$

   Parte B della domanda

   La funzione considerata può essere scritta come:

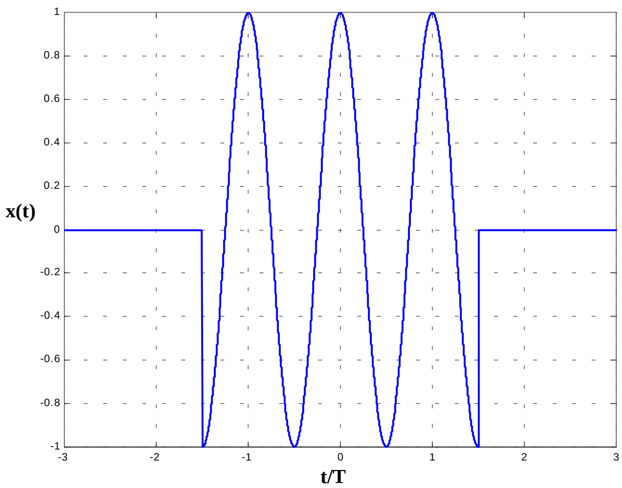
$$x(t) = 10\,\mathrm{tri}\left(\frac{5-t}{4}\right) = 10\,\mathrm{tri}\left[-\left(\frac{t-5}{4}\right)\right]$$

   il suo andamento sarà quindi:



   Il segnale $x(t)$ sarà quindi diverso da 0 nell'intervallo $1 < t < 9$.

2. L'andamento del segnale $x(t)$ è:



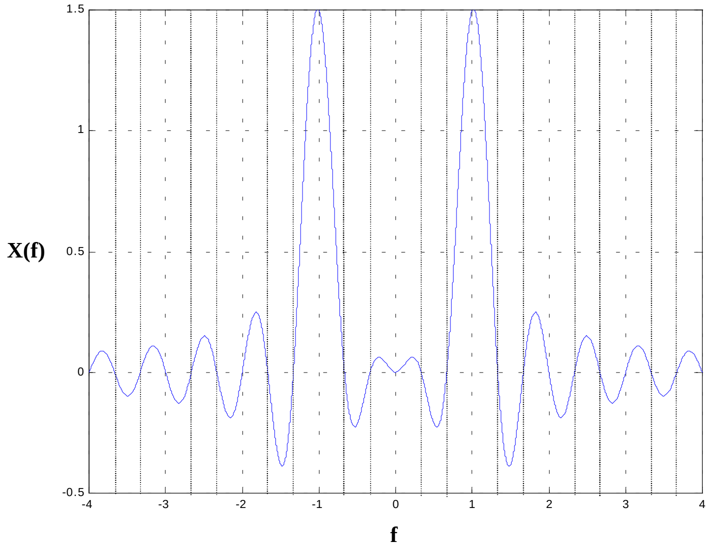
   La trasformata di $x(t)$ può essere calcolata nel modo seguente:

$$x(t) = \cos\left[2\pi \frac{t}{T}\right] \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{t}}{3\mathrm{T}}\right) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

$$X(f) = F[x(t)] = F[x_1(t) \cdot x_2(t)] = F[x_1(t)] * F[x_2(t)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{T}\right)\right] * 3T\,\frac{\sin(\pi f\,3T)}{\pi f\,3T} == \frac{3}{2}T\left\{\frac{\sin\left[\pi\left(f + \frac{1}{T}\right)3T\right]}{\left[\pi\left(f + \frac{1}{T}\right)3T\right]} + \frac{\sin\left[\pi\left(f - \frac{1}{T}\right)3T\right]}{\left[\pi\left(f - \frac{1}{T}\right)3T\right]}\right\}$$

Ponendo $T = 1$ l'andamento di $X(f)$ è:



3. La trasformata del segnale di ingresso, $x(t)$, vale:

$$X(f) = 50 \cdot 800 \sum_{k=\infty}^{\infty} \delta(f - k \cdot 800)$$

La trasformata del segnale di uscita vale:

$$Y(f) = X(f)H(f) = 10 \cdot 50 \cdot 800[\delta(f + 800) + \delta(f) + \delta(f - 800)] =$$
$$= 4 \cdot 10^5 \{[\delta(f + 800) + \delta(f - 800)] + \delta(f)\}$$

nel tempo l'andamento dell'uscita sarà:

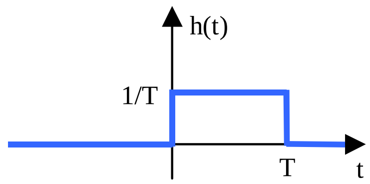
$$y(t) = 4 \cdot 10^5 [2\cos(2\pi 800 t) + 1]$$

4. La relazione fra ingresso uscita vale:

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} x(t) dt$$

ponendo $x(\tau) = \delta(\tau)$ è possibile valutare facilmente la risposta all'impulso. Infatti finchè l'intervallo $(t - T, t)$ include l'origine, e quindi $0 < t < T$, l'uscita varrà $1/T$, perciò:

$$h(t) = \frac{1}{T} rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$



Partendo dalla definizione di prodotto (integrale) di convoluzione, e dalla risposta all'impuslo che abbiamo trovato, possiamo scrivere:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) rect\left(\frac{t - T/2 - \tau}{T}\right) d\tau = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} x(t) dt$$

Infatti, fissato t, la funzione $rect(\ )$ all'interno dell'integrale è diversa da 0 nell'intervallo $(t-T,t)$

Poichè $h(t)=0$ per $t<0$ possiamo dire che il sistema considerato è causale.

5. Possiamo dire che $\mathrm{P}(\mathrm{temp}>40)=\mathrm{Q}\left(\dfrac{40-20}{10}\right)=\mathrm{Q}(2)=0.0228$

6. Riportando F e G in unità lineari abbiamo: $F=2,\ G=10$. La temperatura equivalente di rumore in uscita dal sistema è data da $\left(T_0=293^oK\right)$:

$$T_{eq-uscita}=\left[1000+(F-1)T_0\right]G=1293*10=12930^oK$$

La potenza di rumore in uscita sarà data da (B è la banda del segnale per frequenze, $B=100KHz$):

$$P_{nu}=KT_{eq-uscita}B=1.38\cdot10^{-23}\cdot12930\cdot10^{8}\approx1.8\cdot10^{-11}W$$

7. La minima frequenza di campionamento necessaria a permettere la ricostruzione del segnale è pari a: $f_{c-\min}=200KHz.$ La relazione per valutare il rapporto fra potenza di segnale e potenza del rumore di quantizzazione (segnale con dinamica centrata intorno all'origine, distribuzione uniforme delle ampiuezze, quantizzazione uniforme) è data da: $SNR=6N$ dove N indica il numero di bit per campione (2^N = numero livelli di quantizzazione). Per garantire un SNR pari a 96 dB sono quindi necessari almeno 16 bit per campione. Per trasmettere il segnale considerato in formato PCM sono quindi necessari almeno $2\cdot10^5\cdot16=3.2Mbit/s$.