Milano, 15/11/2002

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (Laurea on Line)

Corso di Fondamenti di Segnali e Trasmissione

Prima prova Intermedia

Carissimi studenti,

scopo di questa prima prova intermedia è quello di verificare il vostro grado di apprendimento sulle prime 14 lezioni del corso.

Il testo della prova vi viene reso disponibile nella serata di Venerdì 15 Novembre 2002. Il file Word contenente le risposte ai quesiti deve essere consegnato, per essere valido, sulla piattaforma LOL (consegna esercizi), entro le ore 24 di Lunedì 18 Novembre. Il file con le risposte deve avere come nome *FST_1_cognome_nome.doc*. Dove *cognome* e *nome* vanno sostituiti con gli effettivi cognome e nome di ciascun studente.

Non vi è possibilità, da parte del docente e dei tutor, di controllare se si realizzino "soluzioni collettive" o avvengano "copiature". Il poter dare un valore a questa prova intermedia è lasciato quindi alla Vostra correttezza.

La prova è articolata in *7* domande che coprono gli argomenti trattati. Ad ognuna di esse dovrete dare una risposta motivandola quanto meglio possibile (nel caso dobbiate scrivere formule usate l'equation editor). E' essenziale che siate precisi e concisi. E' anche possibile non rispondere ad una o più domande. All'inzio di ciascuna riposta andrà indicato il numero del quesito a cui essa si riferisce.

A ciascuna risposta verrà dato un punteggio che varia fra *–2* (risposta errata) a *+5* (risposta completamente corretta). Ad un quesito senza risposta verrà attribuito un punteggio pari a *0*.

Il punteggio assegnato a ciascun quesito potrà essere influenzato anche dal tempo di consegna sul sito Laurea on Line.

La prova verrà ritenuta sufficiente quando il punteggio totale accumulato risulterà superiore o uguale a *18*.

Buon lavoro a tutti,

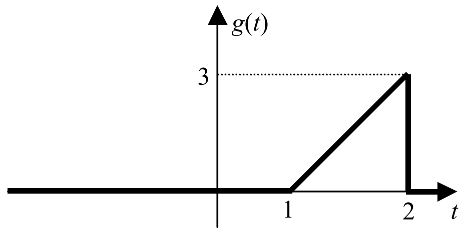
Carlo Riva, Cesare Svelto, Stefano Tubaro

1. Sia dato il segnale complesso:

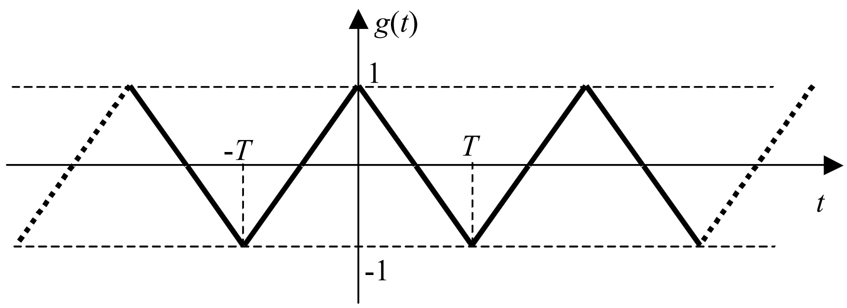
$$x(t) = 5 \cdot e^{j2\pi \frac{t}{6}} + 7 \cdot e^{-j2\pi \frac{t}{9}}$$

Quale è il modulo di tale segnale per t=3?

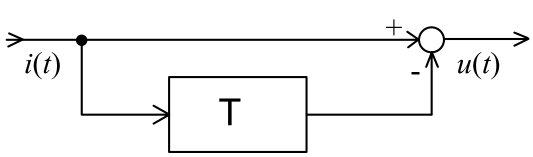
2. Dato il segnale $g(t)$ riportato in figura, disegnare l'andamento del segnale $s(t) = g\left(-\frac{t}{2} + 1\right)$

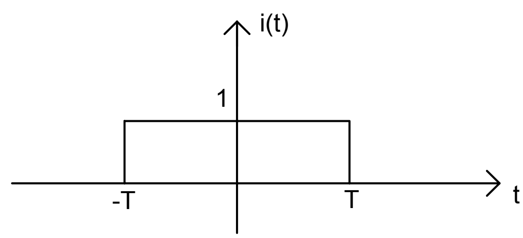


3. Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale periodico.



4. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema in figura (il blocco T rappresenta un ritardo di T secondi). Considerando come ingresso al sistema un segnale ($i(t)$) rettangolare, di lunghezza $2T$ e ampiezza unitaria, quale sarà l'andamento del tempo dell'uscita? Quale sarà la sua trasformata di Fourier?





5. Dati i due segnali $x(t) = 3\cos(10\pi t)$ e $y(t) = 2\cos(10\pi t) + 5\sin(30\pi t)$ si dica se:
   a) esiste un sistema lineare che con ingresso $x(t)$ dà in uscita $y(t)$. In caso di risposta positiva quale potrebbe essere la risposta in frequenza del sistema?
   b) esiste un sistema lineare che con ingresso $y(t)$ dà in uscita $x(t)$. In caso di risposta positiva quale potrebbe essere la risposta in frequenza del sistema?

6. Un rumore $n(t)$ ergodico, con densità di probabilità delle ampiezze di tipo gaussiano e con densità spettrale di potenza bilatera $G_n(f)=|kf|$, passa attraverso un filtro con risposta in frequenza $H(f)$=0.5 negli intervalli $(-f_2, -f_1)$, (f_1,f_2) e 0 altrove. Quale sarà la potenza di rumore all'uscita del filtro?

7. Si consideri il sistema riportato in figura (in cui i vari blocchi risultino fra loro adattati):

Le caratteristiche dei tre blocchi sono:

Ampl.1:	Guadagno di potenza= 10dB
	Temp.eq.rumore=500K
Cavo:	Attenuazione=10dB
	Temperatura fisica del cavo=300K
Ampl.2:	Guadagno di potenza= 20dB
	Temp.eq.rumore=700K

A riguardo della temperatura equivalente di rumore (riportata all'ingresso della catena) è più conveniente considerare o eliminare il primo amplificatore? La risposta deve essere giustificata.

Soluzioni

1. Si ha:

$$\left|x(t)\right|_{t=3} = \left|5\cos\left(2\pi\frac{t}{6}\right) + j5\sin\left(2\pi\frac{t}{6}\right) + 7\cos\left(-2\pi\frac{t}{9}\right) + j7\sin\left(-2\pi\frac{t}{9}\right)\right|_{t=3} =$$

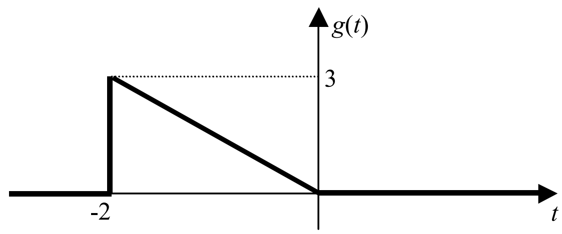
$$= \left|\left[5\cos\left(2\pi\frac{t}{6}\right) + 7\cos\left(2\pi\frac{t}{9}\right)\right] + j\left[5\sin\left(2\pi\frac{t}{6}\right) - 7\sin\left(-2\pi\frac{t}{9}\right)\right]\right|_{t=3} =$$

$$= \left|\left[5\cos(\pi) + 7\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right] + j\left[5\sin(\pi) - 7\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]\right| =$$

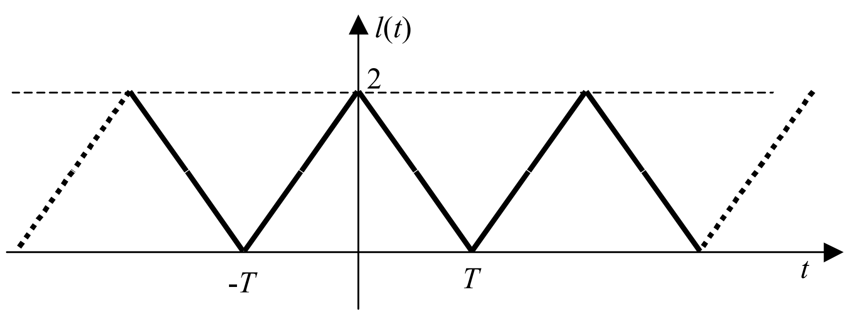
$$= \left|\left[-5 - 7\cdot\frac{1}{2}\right] + j\left[0 - 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right| \cong \left|-8.5 - j6.06\right| \cong$$

$$\cong \sqrt{72.25 + 36.72} \cong \sqrt{109} \cong 10.44$$

2. Possiamo scrivere $s(t) = g\left(-\frac{t}{2} + 1\right) = g\left[-\left(\frac{t-2}{2}\right)\right]$ perciò $s(t)$ è la versione speculare di $g(t)$ rispetto all'origine, scalata di un fattore 2 e ritardata di 2.



3. Il segnale considerato è periodico (perido $2T$). La sua trasformata può essere calcolata in vari modi. Tra i tanti si propone il seguente: iniziamo a calcolare la trasformata di Fourier del segnale in figura.



Esso è costituito dalla ripetizione periodica di un segnale base costituito da un triagolo centrato nell'origine, base $2T$ ed altezza 2. Si ha quindi:

$$L(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}\left[2T\frac{\sin^2(\pi Tf)}{(\pi Tf)^2}\right]_{f=\frac{k}{2T}} \delta\left(f-\frac{k}{2T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin^2(\pi Tf)}{(\pi Tf)^2}\right]_{f=\frac{k}{2T}} \delta\left(f-\frac{k}{2T}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin^2(\pi k/2)}{(\pi k/2)^2}\right]\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)$$

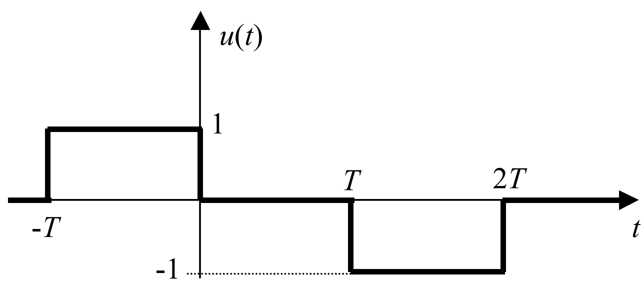
Per ricavare $G(f)$, possiamo scrivere

$g(t) = l(t) - 1$

$\Downarrow$

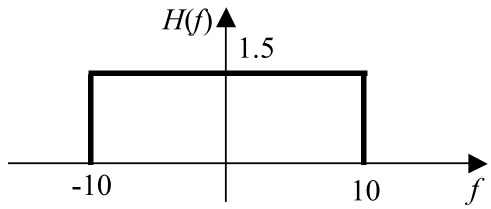
$$G(f) = L(f) - \delta(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin^2(\pi k/2)}{(\pi k/2)^2}\right]\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right) - \delta(f) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{\sin^2(\pi k/2)}{(\pi k/2)^2}\right]\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)$$

4. La relazione ingresso uscita può essere scritta come: $u(t) = i(t) - i(t-T)$. Assumendo come ingresso l'impulso ideale l'uscita sarà la risposta all'impulso del sistema. Si ha perciò: $h(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$. La risposta in frequenza è la trasformata di Fourier della risposta all'impulso: $H(t) = 1 - e^{-j2\pi fT}$. In corrispondenza dell'ingresso illustrato nel testo dell'esercizio l'uscita sarà data da:

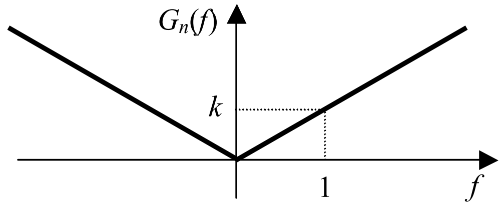


La trasformata di Fourier di $u(t)$ è: $U(f) = T\frac{\sin \pi fT}{\pi fT}\left(e^{j\pi Tf} + e^{-3\pi Tf}\right)$. Siricordi che un ritardo pari a T nel tempo corrisponde a moltiplicare per $e^{-j2\pi fT}$ nelle frequenze.

5. Nel passaggio attraverso un sistema lineare le componenti sinusoidali di un segnale possono essere amplificate, attenuate, annullate, ma non create. Perciò la risposta al quesito a) è no. Al quesito b) invece la rispota è positiva. In questo secondo caso un possibile andamento della funzione di trasferimento è quello di un filtro passa-basso (ideale) con frequenza di taglio f_c tale che $10 \leq f_c < 30$ (un esempio in figura):



6. L'andamento della densità spettrale di potenza all'ingresso del sistema lineare è:



La densità spettrale di potenza in uscita sarà data da: $G_u(f)=G(f)\cdot|H(f)|^2=0.25\cdot G(f)$. La potenza in uscità sarà data da:

$$P_u=\int_{-f_2}^{-f_1}G_u(f)df+\int_{f_1}^{f_2}G_u(f)df=\int_{-f_2}^{-f_1}0.25\cdot|kf|df+\int_{f_1}^{f_2}0.25\cdot|kf|df=$$

$$=2\cdot\int_{f_1}^{f_2}0.25\cdot|kf|df=0.5\cdot|k|\cdot\int_{f_1}^{f_2}fdf=0.5\cdot|k|\cdot\frac{f_2^2-f_1^2}{2}=\frac{|k|}{4}\left(f_2^2-f_1^2\right)$$

7. Esprimendo guadagni e attenuazioni in unità lineari si ha: $G_1=10, G_c=0.1, G_2=100$. La temperatura equivalente del cavo è: $T_{eq-c}=T_c\frac{1-G_c}{G_c}=300\text{K}\frac{1-0.1}{0.1}=2700\text{K}$. La temperatura equivalente (all'ingresso) nei due casi vale:

$$T_{eq-con-Ampl.1}=T_{Ampl.1}+\frac{T_{eq-c}}{G_1}+\frac{T_{eq-2}}{G_1G_c}=\left(500+\frac{2700}{10}+\frac{700}{10\cdot0.1}\right)\text{K}=1470\text{K}$$

$$T_{eq-senza-Ampl.1}=T_{eq-c}+\frac{T_{eq-2}}{G_c}=\left(2700+\frac{700}{0.1}\right)\text{K}=9700\text{K}$$

È' quindi più coneniente utilizzare il primo amplificatore piuttosto che eliminarlo.